

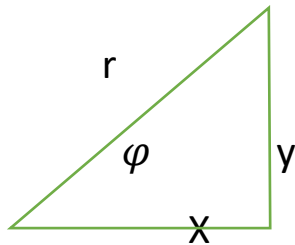
Наставне јединице за **друго1** за **30.03.-03.04.**

Домаћи рад сви шаљете истог дана 08.04.2020.

Овај материјал се налази и на платформи Microsoft Teams.

1. Тригонометријски облик комплексног броја и операције са њима

Познато је од раније алгебарски облик комплексног броја $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, Угао φ је угао који х оса заклапа са r .



$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} (*)$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ тригонометријски облик комплексног броја

Угао φ се назива аргумент комплексног броја z и означава $\text{Arg}z$ -није ознака за један реалан број већ за један из скупа бројева који се међусоно разликују за 2π .

Ако је $z=0$ аргумент се не дефинише.

Операције: $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Задаци су из збирке за трећи разред:

1269.а) Одреити тригонометријски облик комплексног броја ако је дато bi .

Решење: $x=0, y=6, M$ се налази на y оси па је угао $\varphi = \frac{\pi}{2}, r=6$

$$6i = 6(\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)), k \in \mathbb{Z}$$

б) $3+3i$

Решење: $x=3, y=3, r=\sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$3 + 3i = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right), k \in \mathbb{Z}$$

1271. а) $z_1 z_2 = ?$, $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i\sin \frac{11\pi}{4} \right)$, $z_2 = \sqrt{8} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i\sin \frac{3\pi}{8} \right)$

Решење: $z_1 z_2 = \sqrt{2}\sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) \right) = 4 \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i\sin \frac{9\pi}{8} \right)$

Задаци за **домаћи рад**: 1: Одредити тригонометријски облик за комплексне бројеве а) $2-2i$, б) $-\sqrt{3}-i$

2. Ако је $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6} \right)$, $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i\sin \frac{\pi}{12} \right)$. Одредити $z_1 z_2 = ?$

2. Моаврова формула

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \dots z_n &= r_1 r_2 \dots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) \\ &+ i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)) \end{aligned}$$

Задаци из збирке за трећи разред:

1274. а) $z^6 = ?$ ако је $z = \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}$

Решење: $r=1, \varphi = \frac{\pi}{6}$

$$z^6 = r^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = \left(\cos 6\frac{\pi}{6} + i \sin 6\frac{\pi}{6}\right) = \cos \pi + i \sin \pi \\ = -1$$

б) $z^{10} = ?$, $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Решење:

$$x = \frac{3}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}, r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$z^{10} = \sqrt{3}^{10} \left(\cos 10 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin 10 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) \\ = 243 \left(\cos \frac{5\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 243 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

в) $z^{13} = ?$, $z = i - \sqrt{3}$

Решења: $x = -\sqrt{3}, y = 1, r = \sqrt{3+1} = 2$

$$z^{13} = 2^{13} \left(\cos 13 \cdot \frac{5\pi}{6} + i \sin 13 \cdot \frac{5\pi}{6} \right) = 2^{12} (-\sqrt{3} + i)$$

Задачи за **домаћи рад**: 1. Одредити z^6 ако је $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

3. Кореновање комплексног броја

$\omega^n = z$ су n -ти корен из комплексног броја z и под $\sqrt[n]{z}$ подразумева се скуп вредности $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$ где је

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

1275. Одредити z ако је

а) ако је $z^2 = i$

Решење: $x = 0, y = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\omega_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

$$k=0: \omega_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=1: \omega_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

б) $z^3 = 1$

Решење: $x=1, y=0, \varphi = 0$

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Задаци за **домаћи рад**: 1277. Одредити z ако је

а) $z^4 = i$

б) $z^4 = -1$

4. Тригонометрија (надокнада)

Ова наставна јединица је предвиђена за утврђивање градива. Добићете задатке различите тежине које треба да решите и пошаљете у виду домаћег рад.

1. Израчунати $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$

2. Израчунати $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ ако је $\sin \alpha = \frac{12}{13}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

3. Израчунати $\frac{z_1}{z_2}$ ako je $z_1 = 10 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$, $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

4. Решити једначину: $2\sin x + 3\sin 2x = 0$

5. Решити неједначину: $2\sin x \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$